Dr. Christoph Grandt

Das Babylonische Sexagesimalsystem

(Exposée)

Einleitung

Historische Sachverhalte werden im Mathematikunterricht gern als Mittel zur Motivation der Schüler und Schülerinnen verwendet. Insbesondere die klassische Trigonometrie bietet mannigfaltige Möglichkeiten, historische Vorstellungen und Arbeitsweisen, die sich bezeichnenderweise von den unseren kaum unterscheiden, in den Unterricht einzubeziehen. Dabei beinhaltet der historische Ansatz gleichzeitig einen mulitkulturellen; denn wir befinden uns bei der Behandlung solcher Themen unvermittelt in Griechenland, Ägypten, Mesopotamien, Indien oder China.

Sicherlich findet der historische bzw. multikulturelle Ansatz, neben der Motivationsfrage, bereits seine Berechtigung in seinem allgemeinbildenden Charakter. Oft bleibt jedoch nach einer entsprechenden Unterrichtseinheit das Gefühl zurück, daß das *fachliche* Lernziel vielleicht doch besser auf traditionelle Weise erreicht worden wäre.

Nun gibt es neben der Trigonometrie noch einen zweiten Pfeiler der historischen Mathematik: Die Geschichte der Zahl bzw. die Geschichte der Notation von Zahlen.

Eine Auseinandersetzung mit diesem Thema führt schnell zum Begriff der Zahlensysteme, einschließlich moderner Positionssysteme. Umgekehrt liegt es also nahe, bei der Behandlung der Zahlensysteme, etwa im Zusammenhang mit der Potenzrechnung der Klasse 10, die historisch-multikulturelle Dimension dieses Themas zu nutzen. Tatsächlich stellt sich heraus, daß insbesondere das babylonische Sexagesimalsystem aus mehreren Gründen für eine Vertiefung des Themas „Zahlensysteme“ gut geeignet ist; und zwar aus allgemeinbildenden *und* aus mathematischen Gründen.

Der fachlich-didaktischeVorteil des babylonischen Sexagesimalsystems liegt vor allem in der Möglichkeit, es systematisch auch auf die im Zusammenhang mit Zahlensystemen meist vernachlässigten Nachkommastellen anzuwenden, also in der Verwendung von negativen Exponenten zur Basis 60. Davon, daß es sich dabei nicht nur um eine theoretisch-akademische Möglichkeit handelt, zeugen uralte babylonische Tontafeln mit umfangreichen Berechnungen, welche Nachkommastellen ganz selbstverständlich enthalten.

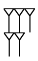
Eine kurze Einführung in das Babylonische Sexagesialsystem

Von den alten Kulturvölkern ist nur von den Sumerern und ihren Nachfolgern, den Babyloniern, bekannt, daß sie ein Stellenwertsystem zur Darstellung von Zahlen benutzten. Während von den Sumerern nur wenige Steintafeln die Zeiten überdauert haben, gibt es viele aussagekräftige mathematische Texte, die während der „ersten Babylonischen Dynastie“ zwischen 1829 und 1530 v. Chr. entstanden sind. Das Wissen um den Vorteil eines Stellenwertsystems ging danach wieder verloren, so daß weder Griechen noch Römer sich eines solchen Zahlensystems bedienten. In diesem Zusammenhang sei auf die *praktischen* Vorteile eines Stellenwertsystems hingewiesen, zum Beispiel im kaufmännischen Bereich. Die Verachtung der Griechen für eine anwendungsorientierte Mathematik mag erklären, warum dieses so erfindungsreiche Volk keine Anstalten machte, sein kompliziertes alphabetischen System durch ein Stellenwertsystem zu ersetzen.

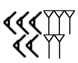
Wie funktioniert nun das „babylonische Zahlensystem“? Es ist ein *Stellenwertsystem zur Basis 60*, mit dem beliebig große, aber auch beliebig kleine Zahlen systematisch dargestellt werden konnten, ohne immer neue Zeichen erfinden zu müssen. Daß es sich dabei um ein Sechzigersystem und nicht um ein Zehnersystem handelt, ist bei den ersten 59 Zahlen keineswegs klar; denn nach der Ziffer „Neun“ wird ein neues Symbol für die „Zehn“ benutzt, was leicht einen falschen Eindruck erwecken kann (und in Unterricht im übrigen eine der Hauptschwierigkeiten für die SchülerInnen darstellt).

Die Babylonier benutzten eine Keilschrift, die durch das Eindrücken von Griffeln in Tontafeln entstand. Die „Eins“ wird durch das Symbol , die „Zehn“ durch das Symbol  dargestellt. Damit ergibt sich zum Beispiel:

2 = 

5 = 

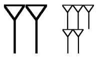
12 = 

55 = 

Es ist nun besonders wichtig, daß dabei jede dieser Zahlen als *eine einzige Ziffer* betrachtet wird. Die für die Darstellung dieser Ziffern benötigten Symbole sollten deshalb möglichst eng aneinandergeschrieben werden.

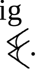
Erst bei Zahlen über 59 wird naturgemäß die nächste Stelle benutzt, nämlich die 60^1-Stelle. Sie wird, wie auch bei unserem Dezimalsystem, nach *links* eingerückt (was nicht selbstverständlich ist). Damit ist zum Beispiel:

$62 =$  $= 1 \cdot 60^1 + 2 \cdot 60^0$

$125 =$  $= 2 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0$

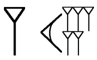
$775 =$  $= 12 \cdot 60^1 + 55 \cdot 60^0$

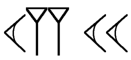
Tabelle 1 gibt einen Überblick über die babylonische Zählweise bei natürlichen Zahlen.

Bei Zahlen größer als 3600 (= 60^2) wurden entsprechend drei Stellen gebraucht u.s.w. Es sei erwähnt, daß ein Symbol für eine Leerstelle (also eine „Null“) von den Babyloniern erst sehr spät eingeführt wurde, aber immerhin bereits vor den häufig als Erfinder der Null geltenden Indern. Das Symbol für eine Leerstelle war .

Genauso interessant ist jedoch, daß die Babylonier ihr Stellenwertsystem systematisch auch für Nachkommazahlen benutzten. Dabei kam ihnen die vielfältige Teilbarkeit der Zahl 60 zugute: Fast alle wichtigen Brüche „gingen auf“. Dies war übrigens sicherlich auch der Grund, warum das Sexagesimalsystem überhaupt eingeführt wurde; denn schon auf dem Gewürzmarkt hat es Vorteile, wenn man von einer Einheit möglichst viele unterschiedliche Teile bilden kann.

Nun also einige Beispiele von babylonischen Nachkommazahlen:

$1{,}25 =$  $= 1 \cdot 60^0 + 15 \cdot 60^{-1}$

$12{,}\overline{3} =$  $= 12 \cdot 60^0 + 20 \cdot 60^{-1}$

$0{,}41 =$  $= 24 \cdot 60^{-1} + 36 \cdot 60^{-2}$

Ein Zeichen für das „Komma“ war nicht in Gebrauch, so daß die Zuordnung der Stellen zu den 60er-Potenzen nicht eindeutig waren. Welche Position z.B. die 60^0-Stelle hat, mußte aus dem Zusammenhang erraten werden.

Tabelle 1: Das Babylonische Sexagesimalsystem

						…				…		…		…		
1	2	3	4	5	6	…	9	10	11	…	19	…	50	…	59	60
		…	…	…	…	…										
61	62	…	…	…	…	…	69	70	71	…	79	…	110	…	119	120
		…	…	…	…	…				…		…		…		
121	122	…	…	…	…	…	129	130	131	…	139	…	170	…	179	180
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
		…	…	…	…	…				…		…		…		
541	542	…	…	…	…	…	549	550	551	…	559	…	590	…	599	600
		…	…	…	…	…				…		…		…		
601*	602*	…	…	…	…	…	609*	610	611	…	619	…	650	…	659	660

* Ein Zeichen für die Leerstellen ( ) wurde von den Babyloniern entwickelt, jedoch nicht konsequent angewandt. Ein „Komma“ zur Kennzeichnung der 60^0-Stelle gab es nicht.

Ein Beispiel für die Unterrichtspraxis: Das Entziffern einer „echten“ Tontafel

Sicherlich eine der aufregendsten und gleichzeitig einfach zu verstehenden babylonischen mathematischen Texten befindet sich auf einer kleinen Tonscheibe von ca. 6 cm Durchmesser (Bild 1):

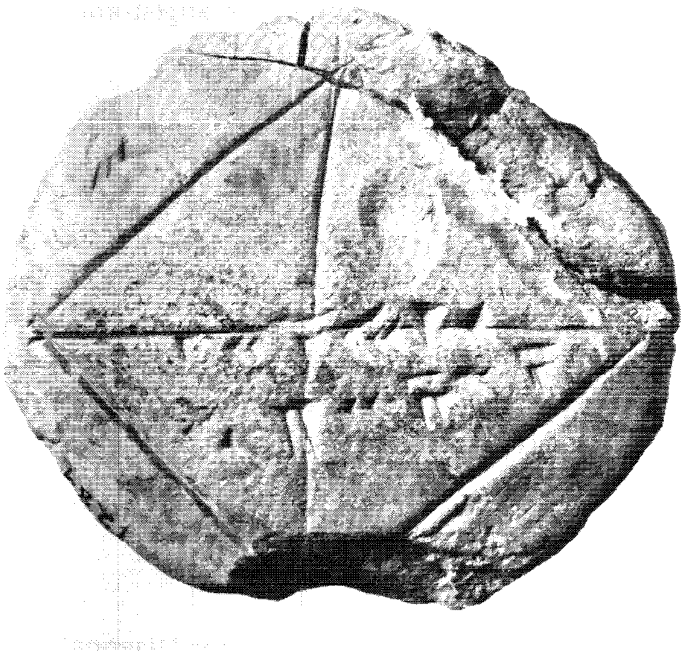


Bild 1: Babylonische Tontafel (Yale Babylonian Collection 7289)

Eine genaue Untersuchung fördert Schriftzeichen zu Tage, die mit der hier vorgestellten Einführung bereits entschlüsselt werden können. Allerdings wird selbst der interessierte Laie an einigen Stellen Schwierigkeiten haben, die Abstände innerhalb bzw. zwischen den „Ziffern“ richtig zuzuordnen (Bilder 2,3):

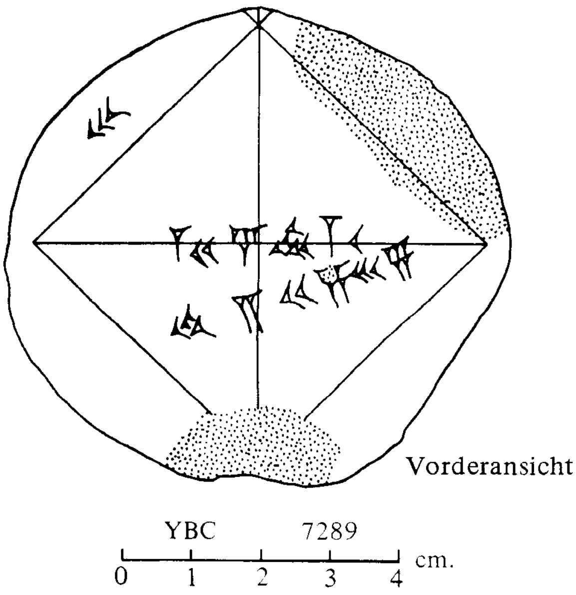


Bild 2: Transkription von YBC 7289

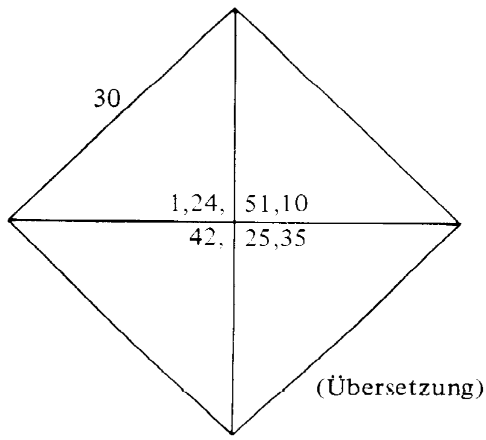


Bild 3: Transliteration von YBC 7289

Zum Verständnis des Textes muß natürlich noch die Frage der Kommaposition gelöst werden. Dies ist, wie bereits erwähnt, nicht allgemein möglich. Es zeigt sich jedoch, daß man in unserem Falle ein sinnvolles Ergebnis erhält, wenn man die erste „1" mit $1 \cdot 60^0$ identifiziert. Für die erste Zeile ergibt sich damit:

$$1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} =$$

$$= 1 + 0{,}4 + 0{,}0141666 + 0{,}0000462 =$$

$$= \underline{\underline{1{,}4142129}}$$

Es handelt sich also um einen Näherungswert für $\sqrt{2}$.

Weiterhin kann leicht überprüft werden, daß die untere Zahl dem Wert $30 \cdot \sqrt{2}$ (in der babylonischen Näherung) entspricht. Wir erkennen außerdem, daß die Zahl 30 links oben als Seitenlänge des Quadrats auftritt. Die Tontafel erklärt also offensichtlich folgendes: „Wenn die Seitenlänge eines Quadrates 30 beträgt, so ist seine Diagonale $30 \cdot \sqrt{2}$."

Dieser Text zeigt, daß die Babylonier sowohl trigonometrische, als auch algebraische Kenntnisse besaßen, was sie von anderen alten Hochkulturen unterschied. Es läßt sich sogar zeigen, daß sie ihre Abschätzung von $\sqrt{2}$ mit Hilfe der uns bekannten Iteration $a_2 = 0{,}5\ (a_1 + x/a_1)$ für $x = 2$ erhalten haben müssen.

Möglichkeiten des Unterrichtseinsatzes

Die deutschen Rahmenpläne sehen die Einführung der Potenzrechnung in der Klasse 10 vor. Auch wenn die Behandlung der Zahlensysteme im allgemeinen nicht explizit erwähnt ist, so bietet sie sich doch in diesem Zusammenhang an. In der zehnten Klasse sollte es bereits möglich sein, das „Selbstverständliche" zu problematisieren und mit Distanz das eigene Zahlensystem zu analysieren. Zwischen Zahl und Zahldarstellung muß klar unterschieden werden. Wenn diese Distanz einmal geschaffen ist, dürfte der Übergang zu anderen Zahlensystemen keine prinzipiellen Schwierigkeiten aufwerfen.

Die heute in der Computertechnik gebräuchlichen Zahlensysteme, nämlich das Hexadezimal-, das Oktal- und das Binärsystem, bieten sich für eine Anwendung des Gelernten an. Jedoch werden nur diejenigen Schüler und Schülerinnen, die sich für Computer interessieren oder gar einen eigenen besitzen, Spaß daran haben. Für die eher musisch veranlagten bleibt der Stoff spröde.

Daneben haben die Computer-Zahlensysteme den großen Nachteil, daß sie nur für die Darstellung ganzer Zahlen verwendet werden, was dazu verführt, bei der Behandlung der Zahlensysteme auf Nachkommastellen zu verzichten. Dies ist unbefriedigend; und zwar nicht nur, weil zum Verständnis der Zahlensysteme nun einmal die Nachkommazahlen dazugehören, sondern auch, weil damit eine Gelegenheit vertan wird, den Schülern und Schülerinnen eine Anwendung der vorher durchgenommenen negativen Exponenten zu ermöglichen.

Es sei jedoch auf eine Schwierigkeit hingewiesen, der einer Einführung des Babylonische Zahlensystems direkt im Anschluß an die Analyse des Dezimalsystems problematisch erscheinen läßt: Die Schüler werden Schwierigkeiten haben, eine Basis größer als 10 (in diesem Falle 60) zu akzeptieren. Als Vorarbeit sollte also ein fiktives Zahlensystem zu einer Basis größer als 10 (z.B. 20) behandelt werden. Erst danach sollte zur Entzifferung von babylonischen Texten übergegangen werden.

Ist einmal das 60er-System verstanden und seine historische Bedeutung erkannt worden, so bietet sich selbsverständlich der Hinweis auf die heutigen Überbleibsel dieses Systems an. Den Schülern und Schülerinnen kann bewußt gemacht werden, daß wir Stunden und Minuten noch immer in 60 Teile zerlegen und daß das einfachste Dreieck, nämlich das gleichseitige, Winkel von je 60° einschließt.

Erfahrungen in der Praxis

Um es gleich vorwegzunehmen: ein Teil der SchülerInnen fragte nach der zweistündigen Sequenz, ob wir in der nächsten Stunde denn wieder „richtige Mathematik“ machen. Dabei handelte es sich aber genau um die „Computerfreaks“, die sich mit der Behandlung der Zahlensysteme eher etwas für ihr Hobby versprochen haben. Dieser Wunsch wurde ihnen in der darauffolgenden Stunde erfüllt.

Dagegen haben einige Schüler und Schülerinnen gut mitgearbeitet, die sonst sehr still sind, obwohl ihnen klar war, daß dieses Thema nicht Stoff einer der nächsten Arbeiten sein würde. Die zusätzliche Motivation war bei ihnen also eindeutig spürbar.

Die Lerngruppe bestand aus 20 Schülern und Schülerinnen einer relativ leistungsstarken Klasse 10 eines Berliner Gymnasiums. Die Sequenz bildete den Abschluß des Themas *Potenzrechnung*.

Die Sequenz ging aus von Kerbhölzern der Steinzeit und führte dann über das Römische System bis hin zu Analyse unseres Dezimalsystems. Das erste „Aha-Erlebnis“ kam bei der Entdeckung, daß die kurz vorher erlernten negativen Potenzen nun zu einfachen Darstellung der Nachkommazahlen verwendet werden können.

Im Anschluß an die Umrechnung einer Zahl ins „Fünfersystem“ wurde den Schülern eine Tabelle verschiedener antiker Zahlensysteme vorgelegt, einschließlich des babylonischen. Dabei bereitete es den Schülern große Schwierigkeiten, die Zahl 60 als Basis zu erkennen. Dies lag zum einen an der Denksperre, Basen größer als 10 zu akzeptieren, wie auch an der komplizierten Struktur der babylonischen „Ziffern“, die ja selbst zusammengesetzt sind. Auf eine genaue Erklärung der einzelnen „Ziffern“ muß also großen Wert gelegt werden.

War die Zahl 60 einmal als Basis akzeptiert (in der 2. Stunde), so ging auch die Entzifferung von selbst erfundenen babylonischen Zahlen ohne

Schwierigkeiten vonstatten. Dies galt auch für die Entzifferung der Tontafel (Bilder 1-3), jedoch mußte natürlich Hilfestellung bei der Zuordnung der Abstände, wie auch bei der Position der 60^0-Stelle geleistet werden. Die Zahl 1,41... wurde schnell als $\sqrt{2}$ erkannt und die geometrische Interpretation machte keinerlei Schwierikeiten.

Interessante Diskussionen ergaben sich noch aus der täglichen Erfahrung mit der Zahl 60. Es wurde von einer Schülerin erkannt, daß die Zahl 60 wohl deshalb so praktisch ist (z.B. für den Marktplatz), da sie viele Teiler hat. Dieses Thema wurde dann auch im Unterricht anhand von Brüchen, die zwar im 60er-System, nicht aber im Zehnersystem „aufgehen“, vertieft (z.B. 1/3, 1/6, 1/12, 1/15 etc.). Damit war dann auch eine Behauptung einer Schülerin ganz am Anfang der Sequenz, daß nämlich unser Zehnersystem halt das allerpraktischste sei, widerlegt. Diese geistige Distanz zur alltäglichen Mathematik und die damit einhergehende Offenheit für andere, gleichberechtigte, Denkgewohnheiten mag dann auch auf lange Sicht der Haupterfolg dieser beiden Stunden gewesen sein.

Davon, daß dies auch die Schüler und Schülerinnen intuitiv gespürt haben, zeugt der spontane Ausspruch eines Schülers während der Stunde: „Das ist ‘was für’s Leben!“.